

Facsímil 12

Lógica e incertidumbre

Capítulo 03

Cuando la verdad es difusa: factores de certeza y lógica difusa

Capítulo 03: Cuando la verdad es difusa: factores de certeza y lógica difusa

Entrando en el tema

En el capítulo 1 de este facsímil la verdad era cómoda: una afirmación era verdadera o falsa, y punto. En el capítulo 2 dimos un paso y aceptamos que no siempre sabemos si algo es verdad; ahí la probabilidad nos dejó hablar de grados de creencia. Este capítulo trata un tercer problema, más sutil y muy fácil de confundir con el segundo: a veces el problema no es que no sepamos si algo es verdad, sino que la propia afirmación no tiene una frontera nítida.

«La habitación está calentita.» «El paciente tiene algo de fiebre.» «Es un hombre alto.» Ninguna de estas frases es verdadera o falsa de golpe. ¿A partir de qué temperatura una habitación deja de estar fresquita y empieza a estar calentita? ¿37,4 °C es «algo de fiebre» o todavía no? No hay un umbral mágico, y si lo pusiéramos a la fuerza tendríamos resultados absurdos: 37,49 °C sería «sano» y 37,50 °C sería «con fiebre», como si un cambio de una centésima cambiara el mundo.

Este es el terreno de la **lógica difusa**, propuesta por Lotfi Zadeh en 1965.¹ Su idea, casi de sentido común, fue radical para la época: dejemos que una afirmación sea verdadera *en cierto grado*, con un valor entre 0 y 1. No «tiene fiebre: sí o no», sino «tiene fiebre con grado 0,7». Antes de llegar ahí pasaremos por los **factores de certeza**, una técnica intermedia que los sistemas expertos clásicos usaron para manejar reglas que no eran del todo seguras. Las dos ideas conviven en el mismo territorio: el de un mundo que no se deja partir limpiamente en dos.

Dos cosas distintas que llamamos «incierto»

El error más común, y el que conviene desmontar antes de cualquier fórmula, es meter en el mismo saco dos fenómenos que no son lo mismo.

La **incertidumbre** es no saber. Lanzo una moneda y, antes de mirarla, no sé si salió cara o cruz. El hecho es perfectamente nítido (es cara o es cruz, sin medias tintas), pero mi conocimiento es incompleto. Eso lo modela la probabilidad, como vimos en el capítulo 2: $P(\text{cara}) = 0,5$ describe mi ignorancia, no una propiedad borrosa de la moneda.

La **imprecisión** o **vaguedad** es otra cosa. «Juan es alto.» Aquí no me falta información: puedo conocer su estatura al milímetro, 1,82 m, y aun así la frase no es simplemente verdadera o falsa, porque «alto» no tiene una frontera exacta. El problema no está en lo que sé, sino en el propio predicado, que admite grados.

ASPECTO	INCERTIDUMBRE (PROBABILIDAD)	IMPRECISIÓN (LÓGICA DIFUSA)
Qué desconozco	Si un hecho nítido ocurre o no.	Nada: el hecho es vago por naturaleza.
Ejemplo	«¿Lloverá mañana?»	«Hoy hace calor.»
Qué mide el número	Grado de creencia en que algo es cierto.	Grado en que algo pertenece a una categoría.
Al observar la realidad	La duda se resuelve: llovió o no llovió.	La vaguedad permanece: 24 °C sigue siendo «calorcito» a medias.
Suma sobre alternativas	Las probabilidades de un suceso suman 1.	Los grados de pertenencia no tienen por qué sumar 1.

Ese último punto de la tabla es el más revelador y conviene grabárselo. Si hoy estamos a 22 °C, la temperatura puede pertenecer a «templado» con grado 0,8 y a «caliente» con grado 0,1 a la vez, y esos números **no suman 1** ni tienen por qué. No estoy repartiendo una probabilidad entre categorías excluyentes; estoy diciendo cuánto encaja un mismo valor en cada etiqueta solapada. Russell y Norvig insisten en esta distinción precisamente porque mezclarla lleva a usar la herramienta equivocada: la teoría de conjuntos difusos trata el grado de verdad de proposiciones vagas, no la probabilidad de proposiciones inciertas.²

La lección práctica: si tu pregunta es «¿pasará esto?», probablemente quieres probabilidad. Si tu pregunta es «¿cuánto se cumple esto?», probablemente quieres lógica difusa.

Factores de certeza: el apañío de los sistemas expertos

Antes de Zadeh llegara a las máquinas de control, hubo un problema más terrenal. En los años setenta se construyeron los primeros **sistemas expertos**: programas que codificaban el conocimiento de un especialista como un montón de reglas SI-ENTONCES. El más famoso fue MYCIN, desarrollado en Stanford para recomendar tratamientos de infecciones bacterianas.³ Y MYCIN se topó de frente con la vaguedad del conocimiento médico real: un médico no dice «si hay fiebre alta, entonces es gripe» como una verdad absoluta. Dice algo más parecido a «si hay fiebre alta, *tiendo a pensar* que es gripe, pero no estoy seguro del todo».

Los autores de MYCIN no querían meterse en la probabilidad bayesiana completa (faltaban datos para estimar tantas probabilidades, y el capítulo 2 ya nos avisó de lo caras que salen las tablas conjuntas). Inventaron un atajo: el **factor de certeza** o CF (del inglés *certainty factor*), un número entre -1 y +1 que resume cuánto refuerza o debilita una evidencia a una hipótesis.⁴

VALOR DEL CF	LECTURA
$CF = +1$	Certeza total de que la hipótesis es cierta.
CF entre 0 y 1	La evidencia apoya la hipótesis, con más fuerza cuanto más cerca de 1.
$CF = 0$	La evidencia no dice nada a favor ni en contra.
CF entre -1 y 0	La evidencia va en contra de la hipótesis.
$CF = -1$	Certeza total de que la hipótesis es falsa.

Cada regla lleva su propio CF, que mide cuánto creería el experto en la conclusión si la premisa fuera totalmente cierta:

$$\text{SI } e \text{ ENTONCES } h \quad (CF_{\text{regla}})$$

En palabras: si se observa la evidencia e , se apuesta por la hipótesis h con una fuerza CF_{regla} ; ese número, que fija el experto, dice cuánto creería en h si e fuese completamente segura.

Pero la premisa no siempre es totalmente cierta. Si solo estamos seguros de la evidencia e con un grado $CF(e)$, la conclusión se **atenúa**. MYCIN propaga así, dejando pasar solo la parte positiva de la evidencia:

$$CF(h, e) = CF_{\text{regla}} \cdot \max(0, CF(e))$$

En palabras: la certeza que una regla aporta a su hipótesis es la confianza de la regla multiplicada por la certeza de la evidencia, pero solo cuando esa evidencia juega a favor; si la evidencia es dudosa o va en contra, la parte positiva vale cero y la regla no aporta nada.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
e	La evidencia observada, premisa de la regla.	«el paciente tiene fiebre alta».
h	La hipótesis que la regla apoya, su conclusión.	«el paciente tiene gripe».
CF_{regla}	Confianza en la regla si la premisa fuese segura.	0,8 para «fiebre alta → gripe».
$CF(e)$	Certeza que tenemos sobre la evidencia.	0,5 si la fiebre solo es probable.
$CF(h, e)$	Certeza que la regla aporta a la hipótesis.	$0,8 \cdot 0,5 = 0,4$.

Combinar evidencias: cuando dos reglas opinan a la vez

La parte interesante llega cuando **dos reglas distintas** apoyan la misma hipótesis. Imagina dos pistas independientes que sugieren gripe: la fiebre y el dolor muscular. Cada una aporta su CF, y necesitamos fundirlos en una sola creencia. MYCIN usa una regla de combinación que depende de los signos:

$$CF(x, y) = \begin{cases} x + y(1 - x) & \text{si } x, y \geq 0 \\ [4pt] x + y(1 + x) & \text{si } x, y \leq 0 \\ [4pt] \frac{x + y}{1 - \min(|x|, |y|)} & \text{si signos opuestos} \end{cases}$$

En palabras: para fundir dos creencias sobre la misma hipótesis, si las dos empujan en el mismo sentido se suman descontando lo que ya cubría la otra, de modo que nunca pasan de 1 ni bajan de -1 ; si empujan en sentidos opuestos, se restan y se normalizan dividiendo por lo que tienen en común.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
x	Creencia ya acumulada en la hipótesis.	0,8 tras la primera regla.
y	Creencia que aporta la nueva evidencia.	0,6 de la segunda regla.
$CF(x, y)$	Creencia combinada de ambas.	0,92 al unir las.

CASO	IDEA INTUITIVA
Ambos positivos	Dos pistas a favor refuerzan, pero con rendimientos decrecientes: nunca pasan de 1.
Ambos negativos	Dos pistas en contra refuerzan la negación, sin bajar de -1 .
Signos opuestos	Una pista a favor y otra en contra se cancelan parcialmente.

Hagamos un ejemplo numérico completo. El paciente tiene fiebre alta (segura, $CF = 1$) y dolor muscular (seguro, $CF = 1$). Hay dos reglas:

- R1: SI fiebre alta ENTONCES gripe, con $CF_{\text{regla}} = 0,8$.
- R2: SI dolor muscular ENTONCES gripe, con $CF_{\text{regla}} = 0,6$.

Cada regla aporta su CF a la hipótesis «gripe»:

$$CF_1 = 0,8 \cdot 1 = 0,8, \quad CF_2 = 0,6 \cdot 1 = 0,6$$

Como ambos son positivos, los combinamos con la primera rama:

$$CF = 0,8 + 0,6(1 - 0,8) = 0,8 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,8 + 0,12 = 0,92$$

Dos pistas a favor han subido la creencia de 0,8 a 0,92, pero ojo: no a 1,4. La fórmula respeta el techo. Ahora supongamos que aparece una tercera regla en contra, porque el paciente no tiene tos, lo cual es raro en una gripe:

- R3: SI no hay tos ENTONCES gripe, con $CF_{\text{regla}} = -0,4$.

Combinamos el 0,92 acumulado con el $-0,4$. Signos opuestos, tercera rama:

$$CF = \frac{0,92 + (-0,4)}{1 - \min(0,92, 0,4)} = \frac{0,52}{1 - 0,4} = \frac{0,52}{0,6} \approx 0,87$$

La evidencia en contra ha rebajado la creencia de 0,92 a 0,87, pero sin tumbarla. Para las premisas compuestas, MYCIN usa los mismos operadores que veremos en la parte difusa: el **mínimo** para la conjunción (Y) y el **máximo** para la disyunción (O).

$$CF(e_1 \wedge e_2) = \min(CF(e_1), CF(e_2)), \quad CF(e_1 \vee e_2) = \max(CF(e_1), CF(e_2))$$

En palabras: cuando una premisa une varias condiciones, la certeza de un «Y» es la de la condición más floja (su eslabón más débil) y la de un «O» es la de la condición más fuerte.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
e_1, e_2	Las condiciones que forman la premisa.	«fiebre alta» y «dolor muscular».
$\min(\cdot)$	Mínimo de los grados, para el «Y».	$\min(0,5, 0,9) = 0,5$.
$\max(\cdot)$	Máximo de los grados, para el «O».	$\max(0,5, 0,9) = 0,9$.

Por qué se usaron y por qué se quedaron cortos

Los factores de certeza funcionaron en la práctica y eran fáciles de explicar a un médico: cada regla tenía su número, y el sistema podía mostrar la cadena de reglas que llevó a una conclusión. Eso conecta de lleno con el capítulo 4, donde los sistemas expertos se apoyan en esta misma trazabilidad para justificar una decisión. Pero tenían un defecto de fondo que sus propios autores reconocieron: los CF no son probabilidades, aunque a veces se comporten parecido. La fórmula de combinación supone que las evidencias son independientes y modulares, algo que casi nunca se cumple, y puede dar resultados inconsistentes cuando las reglas se encadenan mucho. Con el tiempo, las **redes bayesianas** del capítulo 2 ofrecieron un fundamento más sólido para la incertidumbre, y los factores de certeza quedaron como una pieza histórica. Pero su espíritu (reglas graduales, fáciles de auditar) sigue vivo cada vez que un sistema asigna una puntuación de confianza a una conclusión.

Conjuntos difusos: pertenecer a medias

Volvamos a la vaguedad pura, que es donde Zadeh hizo su aportación. En la teoría de conjuntos de toda la vida, un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto. El conjunto de los «mayores de edad» es nítido: con 17 años y 364 días estás fuera; con 18, dentro. La función que describe esa pertenencia solo toma dos valores, 0 o 1.

Un **conjunto difuso** rompe esa frontera. Su **función de pertenencia** ya no devuelve 0 o 1, sino cualquier valor del intervalo $[0, 1]$:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

En palabras: una función de pertenencia toma cualquier valor del universo y le asigna un número entre 0 y 1 que dice cuánto encaja ese valor en el conjunto difuso, desde nada en absoluto (0) hasta del todo (1).

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
A	El conjunto difuso.	«Temperatura caliente».
X	El universo de discurso: los valores posibles.	Grados centígrados de 0 a 40.
x	Un valor concreto del universo.	$x = 22\text{ °C}$.
$\mu_A(x)$	Grado de pertenencia de x al conjunto A .	$\mu_{\text{caliente}}(22) = 0,1$.

Si $\mu_A(x) = 1$, el valor pertenece de lleno; si $\mu_A(x) = 0$, está completamente fuera; y todo lo de en medio es pertenencia parcial. Una temperatura de 22 °C puede pertenecer a «templado» con grado 0,8 y a «caliente» con grado 0,1: encaja mucho en una etiqueta y un poco en la vecina.

Las formas habituales de una función de pertenencia

En la práctica no se dibujan curvas caprichosas. Se usan unas pocas formas sencillas, porque son fáciles de definir con dos o cuatro números y rápidas de calcular. Las dos más comunes son la **triangular** y la **trapezoidal**.

La triangular sube desde 0 hasta un pico y vuelve a bajar. Se define con tres puntos: dónde empieza a subir (a), dónde está el pico (b) y dónde acaba de bajar (c):

$$\mu_{\Delta}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x - a}{b - a}, \frac{c - x}{c - b}\right), 0\right)$$

En palabras: el grado sube en línea recta desde 0 en el punto a hasta 1 en el pico b , y baja igual de recto hasta 0 en c ; fuera del intervalo $[a, c]$ vale 0.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
x	Valor de entrada que evaluamos.	22 °C.
a, b, c	Pie de subida, pico y pie de bajada.	10, 20, 30 para «templado».
$\mu_{\Delta}(x)$	Grado de pertenencia resultante.	0,8 a 22 °C.

La trapezoidal es igual pero con una meseta plana arriba, útil cuando hay un rango de valores que pertenecen «del todo». Se define con cuatro puntos:

$$\mu_{\text{trap}}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x - a}{b - a}, 1, \frac{d - x}{d - c}\right), 0\right)$$

En palabras: funciona como la triangular, pero con una meseta plana en 1 entre b y c : se sube hasta b , todos los valores entre b y c pertenecen del todo, se baja desde c , y fuera de $[a, d]$ el grado es 0.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
x	Valor de entrada que evaluamos.	23 °C.
a, b, c, d	Pie izquierdo, inicio y fin de la meseta, pie derecho.	18, 20, 24, 26 para «temperatura confortable».
$\mu_{\text{trap}}(x)$	Grado de pertenencia resultante.	1 en toda la meseta.

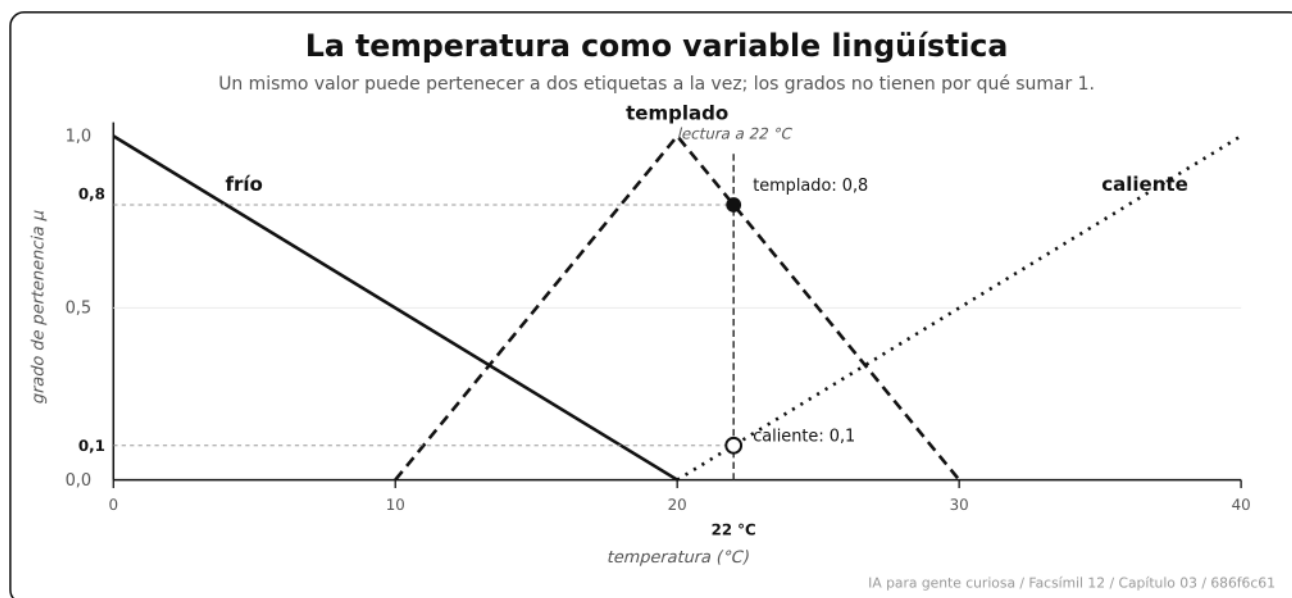
FORMA	PARÁMETROS	CUÁNDO CONVIENE
Triangular	a, b, c	Un valor «ideal» único y descenso a ambos lados.
Trapezoidal	a, b, c, d	Un rango entero que pertenece de lleno (la meseta).

Variables lingüísticas: poner palabras a los números

Aquí aparece una de las ideas más bonitas de Zadeh: la **variable lingüística**. En vez de tratar la temperatura como un número, la tratamos como una variable cuyos valores son *palabras*: frío, templado, caliente. Cada palabra es una **etiqueta** asociada a un conjunto

difuso con su función de pertenencia. Así, la frase «hace calor» deja de ser metáfora y pasa a tener una traducción matemática precisa.

El siguiente diagrama muestra tres etiquetas solapadas sobre el eje de temperatura. Fíjate en cómo se montan unas sobre otras: ese solapamiento es justo lo que permite que un valor pertenezca a dos categorías a la vez.



Con estas tres etiquetas, definidas como triángulos, la lectura de 22 °C es directa. La etiqueta «frío» tiene pico en 0 °C y llega a cero en 20 °C, así que a 22 °C ya vale 0. «Templado» es un triángulo con pico en 20 °C que baja hasta 0 en 10 y en 30; a 22 °C su grado es $(30 - 22)/10 = 0,8$. «Caliente» sube desde 0 en 20 °C hasta 1 en 40 °C; a 22 °C vale $(22 - 20)/20 = 0,1$. Esos son los dos puntos marcados en el diagrama.

ETIQUETA	DEFINICIÓN TRIANGULAR	M A 22 °C
frío	$\triangle(x; -, 0, 20)$	0
templado	$\triangle(x; 10, 20, 30)$	0,8
caliente	$\triangle(x; 20, 40, -)$	0,1

Operadores y reglas difusas

Una vez que tenemos grados de verdad, necesitamos combinarlos. La lógica difusa hereda los tres conectores de la lógica clásica, pero los reescribe para que funcionen con valores continuos. Las definiciones estándar de Zadeh son:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (\text{conjunción, Y})$$

En palabras: algo cumple «A y B» tanto como cumpla la condición que peor lleva, así que se toma el menor de los dos grados.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (\text{disyunción, O})$$

En palabras: algo cumple «A o B» tanto como cumpla la condición que mejor lleva, así que se toma el mayor de los dos grados.

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (\text{complemento, NO})$$

En palabras: el grado de «no A» es lo que le falta a A para llegar a 1; si algo pertenece a «caliente» con 0,7, pertenece a «no caliente» con 0,3.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
$\mu_A(x)$	Grado de x en el conjunto A .	templado a 22 °C: 0,8.
$\mu_B(x)$	Grado de x en el conjunto B .	caliente a 22 °C: 0,1.
min, max, 1–	Operadores para Y, O y NO.	$\min(0,8, 0,1) = 0,1$.

OPERADOR	REGLA DIFUSA	COMPROBACIÓN CON EXTREMOS
Y (conjunción)	mínimo de los grados	$\min(1, 1) = 1$, $\min(1, 0) = 0$: coincide con el AND clásico.
O (disyunción)	máximo de los grados	$\max(0, 0) = 0$, $\max(1, 0) = 1$: coincide con el OR clásico.
NO (complemento)	uno menos el grado	$1 - 1 = 0$, $1 - 0 = 1$: coincide con la negación clásica.

Lo elegante es que, si solo metemos ceros y unos, estos operadores se comportan exactamente como los booleanos de toda la vida. La lógica difusa **contiene** a la clásica como caso particular, igual que en el capítulo 5 del Facsímil 2 vimos que un CSP contiene a SAT. Ross subraya este punto: los conectores difusos generalizan los clásicos sin contradecirlos, lo que permite construir reglas que degradan suavemente en lugar de saltar de golpe.⁵

Con los operadores en la mano, una **regla difusa SI-ENTONCES** tiene la misma pinta que una regla normal, pero sus términos son etiquetas difusas:

SI servicio es *excelente* O comida es *buena* ENTONCES propina es *alta*

En palabras: si el servicio es excelente o la comida es buena, la propina debería ser alta; pero como cada etiqueta se cumple solo en cierto grado, la conclusión «propina alta» se activará en ese mismo grado, no de golpe.

La diferencia es que la premisa no es verdadera o falsa: se cumple en cierto grado, y ese grado «moja» a la conclusión. Veámoslo de principio a fin.

Inferencia de Mamdani: un controlador de propina paso a paso

El método más conocido para razonar con reglas difusas es la **inferencia de Mamdani**, propuesta por Ebrahim Mamdani y Sedrak Assilian en 1975 para controlar una máquina de vapor cuando las ecuaciones clásicas se quedaban cortas.⁶ Tiene cuatro pasos: fuzzificar, evaluar las reglas, agregar y defuzzificar. Vamos a recorrerlos enteros con números, usando el ejemplo clásico de calcular la propina de un restaurante en función de la calidad del servicio y de la comida.

El problema. Dos entradas, ambas valoradas de 0 a 10: la calidad del *servicio* y la calidad de la *comida*. Una salida: el *porcentaje de propina*, de 0 a 25 %. Definimos las etiquetas así:

VARIABLE	ETIQUETAS (CONJUNTOS DIFUSOS)
servicio (0-10)	malo $\triangle(-, 0, 5)$, aceptable $\triangle(0, 5, 10)$, excelente $\triangle(5, 10, -)$
comida (0-10)	mala $\triangle(-, 0, 5)$, buena $\triangle(5, 10, -)$
propina (0-25 %)	baja $\triangle(-, 0, 12,5)$, media $\triangle(0, 12,5, 25)$, alta $\triangle(12,5, 25, -)$

Y tres reglas, que resumen el sentido común de cualquier comensal:

- R1: SI servicio es *malo* O comida es *mala* ENTONCES propina es *baja*.
- R2: SI servicio es *aceptable* ENTONCES propina es *media*.
- R3: SI servicio es *excelente* O comida es *buena* ENTONCES propina es *alta*.

Supongamos una cena concreta: el servicio fue notable, *servicio* = 7, y la comida estuvo muy bien, *comida* = 8.

Antes de meternos en los cálculos, este es el recorrido completo de un extremo a otro: dos números crudos entran por la izquierda y salen, por la derecha, convertidos en una sola propina. Cada paso transforma un poco más la información hasta colapsarla en una cifra.

La inferencia de Mamdani de principio a fin

De dos números crudos a una propina concreta, en cuatro pasos encadenados.

1 · Fuzzificar

números → grados

servicio 7:

aceptable 0,6
excelente 0,4

comida 8:

buena 0,6

grados

2 · Evaluar reglas

$Y = \text{mín} \cdot O = \text{máx}$

R1 (O): $\text{máx}(0;0) = 0$

R2: aceptable = 0,6

R3 (O): $\text{máx}(0,4;0,6)$
= 0,6

cada fuerza recorta

conjuntos

3 · Agregar

máximo punto a punto



media + alta, techo 0,6

una figura

4 · Defuzzificar

centroide de la figura

$z^* = \int z \cdot \mu \, dz / \int \mu \, dz$

centro de gravedad

≈ 14,2 %

la propina final

IA para gente curiosa / Facsímil 12 / Capítulo 03 / 686f6c61

Paso 1: fuzzificación

Fuzzificar es traducir los números crudos a grados de pertenencia. Para *servicio* = 7:

ETIQUETA DE SERVICIO	CÁLCULO	GRADO
malo	$7 > 5$	0
aceptable	$(10 - 7)/5$	0,6
excelente	$(7 - 5)/5$	0,4

Para *comida* = 8:

ETIQUETA DE COMIDA	CÁLCULO	GRADO
mala	$8 > 5$	0
buena	$(8 - 5)/5$	0,6

Paso 2: evaluación de las reglas

Cada regla calcula la fuerza de su premisa con los operadores difusos, y esa fuerza limita su conclusión. La premisa con «O» usa el máximo; con «Y» usaría el mínimo.

REGLA	PREMISA	OPERACIÓN	FUERZA DE ACTIVACIÓN
R1	servicio malo (0) O comida mala (0)	$\max(0, 0)$	0
R2	servicio aceptable (0,6)	—	0,6
R3	servicio excelente (0,4) O comida buena (0,6)	$\max(0,4, 0,6)$	0,6

R1 no se activa en absoluto (fuerza 0), así que «propina baja» no contribuye. R2 activa «propina media» con fuerza 0,6 y R3 activa «propina alta» con fuerza 0,6. En Mamdani, esa fuerza **recorta** (operación mínimo) la función de pertenencia de la conclusión: el triángulo de «media» se queda con un techo plano a la altura 0,6, y lo mismo le pasa a «alta».

Paso 3: agregación

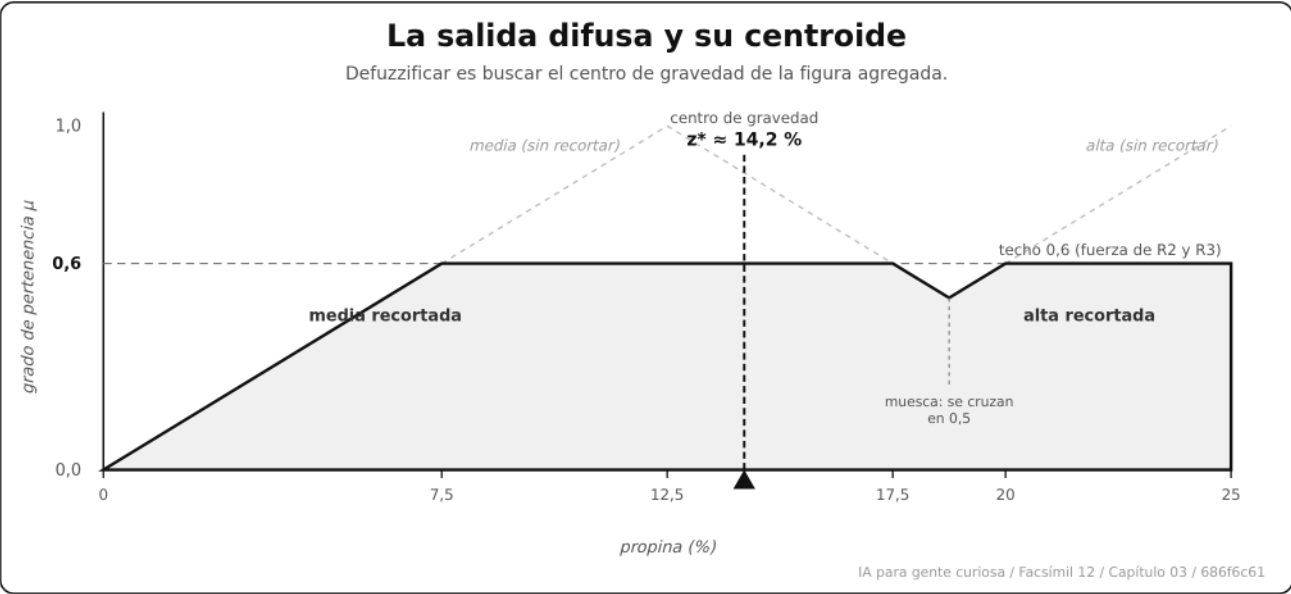
Ahora superponemos todas las conclusiones recortadas en una sola figura, tomando el **máximo** punto a punto. El resultado es un único conjunto difuso de salida, con esta forma sobre el eje de la propina:

$$\mu(z) = \max \left(\min(0,6, \mu_{\text{media}}(z)), \min(0,6, \mu_{\text{alta}}(z)) \right)$$

En palabras: en cada punto del eje de la propina ponemos la mayor de las alturas que aportan las reglas activas, después de recortar cada conclusión a su fuerza; es decir, superponemos «media» y «alta» recortadas y nos quedamos con el contorno más alto.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	EJEMPLO
z	Un valor del eje de salida, la propina.	15 %.
$\mu_{\text{media}}(z), \mu_{\text{alta}}(z)$	Pertenencia de z a cada conclusión.	faldas de «media» y «alta».
0,6	Fuerza que recorta cada regla (su techo).	de R2 y R3.
$\mu(z)$	Altura de la figura agregada en z .	el contorno superior.

El siguiente diagrama dibuja esa figura agregada. Sube por la izquierda (la falda de «media»), se aplana en 0,6, tiene una pequeña muesca donde «media» y «alta» se cruzan por debajo del techo, y vuelve a 0,6 hasta el extremo derecho (la cima recortada de «alta»).



Paso 4: defuzzificación por centroide

La figura agregada todavía es difusa, pero el camarero necesita un número: ¿cuánto dejo de propina? **Defuzzificar** es colapsar esa figura en un valor concreto. El método más usado es el **centroide** o centro de gravedad: el punto del eje donde la figura «se equilibraría» si fuera una placa con peso.

$$z^* = \frac{\int z \mu(z) dz}{\int \mu(z) dz} \approx \frac{\sum_i z_i \mu(z_i)}{\sum_i \mu(z_i)}$$

En palabras: el valor final es el promedio de todas las posiciones del eje, pero ponderando cada una por la altura de la figura en ese punto; equivale a buscar el punto donde la figura quedaría en equilibrio si fuese una placa con peso.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
z^*	Valor defuzzificado: la propina final.
$\mu(z)$	Grado de pertenencia de la figura agregada en cada punto z .
numerador	Suma de cada posición ponderada por su «altura» (el momento).
denominador	Área total de la figura.

Calculemos el centroide de nuestra figura. Conviene partirla en tramos geométricos sencillos y sumar el área de cada uno y su momento (área por la posición de su propio centro). La figura tiene cinco tramos:

TRAMO	FORMA	ÁREA $\int MDZ$	MOMENTO $\int Z MDZ$
[0; 7,5]	triángulo que sube a 0,6	2,250	11,250
[7,5; 17,5]	rectángulo de altura 0,6	6,000	75,000
[17,5; 20]	rectángulo con muesca hacia 0,5	1,375	25,781
[20; 25]	rectángulo de altura 0,6	3,000	67,500
Total		12,625	179,531

Dividiendo el momento total entre el área total:

$$z^* = \frac{179,531}{12,625} \approx 14,22$$

El controlador difuso recomienda una propina de aproximadamente **14,2 %**. Y fíjate en lo que ha pasado: un servicio de 7 y una comida de 8 no han disparado ni la propina mínima ni la máxima, sino un valor intermedio razonable, mezclando suavemente «media» y «alta» según cuánto se activó cada regla. Ningún umbral brusco; una transición continua. Eso es exactamente lo que la lógica binaria no sabía hacer y lo que hace tan útiles a estos controladores.

MÉTODO DE DEFUZZIFICACIÓN	QUÉ DEVUELVE	CARÁCTER
Centroide	Centro de gravedad de la figura.	Suave, tiene en cuenta toda la forma.
Bisector	El z que parte el área en dos mitades iguales.	Parecido al centroide, algo más barato.
Máximo (media)	Promedio de los puntos donde μ es máxima.	Brusco, ignora la forma de las faldas.

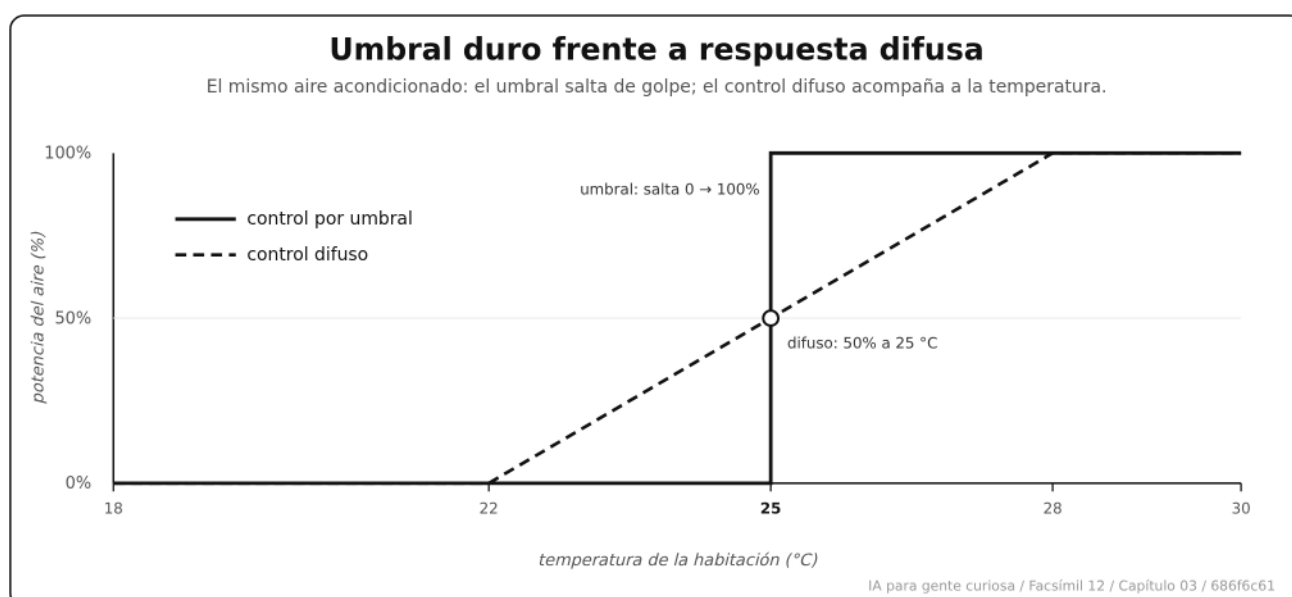
En el día a día

Aunque haya nacido en un laboratorio, la lógica difusa lleva décadas dentro de electrodomésticos que probablemente tienes en casa. Es uno de esos casos en los que una idea académica se volvió tan común que dejó de mencionarse. Donde más triunfó fue en el **control**, justo el terreno que conecta con la robótica y los sistemas embebidos.

APARATO	ENTRADAS DIFUSAS	SALIDA CONTROLADA
Aire acondicionado	temperatura, ritmo de cambio	potencia del compresor
Lavadora	suciedad del agua, tamaño de la carga	duración del ciclo, agua
Cámara de fotos	contraste de la escena, movimiento	enfoque, estabilización
Tren metropolitano	velocidad, distancia a la parada	aceleración y frenado suaves
Riego de jardín	humedad del suelo, previsión de lluvia	caudal y duración del riego
Frenos ABS	deslizamiento de la rueda, velocidad	presión de frenado

La razón por la que arrasó en control es la que vimos en el ejemplo de la propina: un controlador difuso pasa de un estado a otro sin escalones bruscos. Un termostato binario enciende y apaga de golpe, y notas el vaivén; uno difuso ajusta la potencia de forma gradual y mantiene la habitación más estable con menos consumo. El metro de Sendai, en Japón, fue un caso célebre de frenado difuso tan suave que los pasajeros apenas lo notaban.

El siguiente diagrama enfrenta las dos formas de mandar sobre el mismo aire acondicionado. El control por umbral mantiene el aparato apagado hasta los 25 °C y entonces lo dispara al 100 %: justo en la frontera, una décima de grado decide entre nada y todo, y el aparato se pasa el rato encendiéndose y apagándose. El control difuso, en cambio, empieza a soplar flojito en cuanto la habitación se entibia y va subiendo la potencia conforme sube la temperatura, sin saltos.



La misma lógica aparece en sitios menos visibles. Un sistema de **riego** automático no abre la válvula a tope en cuanto el suelo baja de un umbral: mide la humedad de la tierra y la previsión de lluvia y gradúa el caudal, de modo que un día algo seco recibe un riego suave en lugar de un encharcamiento. Los **frenos ABS** de muchos coches modulan la presión según cuánto desliza la rueda y a qué velocidad va, buscando el punto justo entre el bloqueo y la frenada timorata. Y una **cámara de fotos** ajusta enfoque y estabilización combinando el contraste de la escena y el movimiento detectado, dos entradas que nunca son del todo «sí» o «no». En todos estos casos la gracia es la misma del termostato: cambiar un interruptor brusco por una respuesta que acompaña al mundo en lugar de pelearse con él.

En el mundo del software de negocio, la lógica difusa vive hoy en las **reglas graduales**: puntuaciones de riesgo, sistemas de recomendación con preferencias suaves, motores de decisión donde «cliente muy fiel» o «pedido bastante urgente» se modelan como grados en lugar de umbrales secos. Donde no encaja especialmente es en los grandes modelos de lenguaje: un LLM aprende sus propias representaciones internas y no razona con funciones de pertenencia explícitas. Pero su primo cercano, la idea de **guardrails graduales** que vimos en el Facsímil 2, sí bebe de aquí: una política que no sea «permitido / prohibido» a secas, sino «permitido con grado de confianza», es una política difusa con otro nombre.

Por qué debería importarte

Porque la mayoría de las decisiones reales no son binarias y, sin embargo, seguimos programándolas con `if` rígidos que esconden umbrales arbitrarios. «Si la temperatura supera 25, enciende el aire» convierte una realidad gradual en un interruptor, y luego nos extraña que el sistema oscile o se comporte de forma tosca justo en la frontera.

La lógica difusa te da un vocabulario para razonar con grados sin renunciar a obtener un número concreto al final. Y los factores de certeza te enseñan que se puede asignar confianza a una conclusión y combinar evidencias sin montar toda la maquinaria probabilística. Las dos ideas comparten una lección que recorre este facsímil entero: entre el «sí» y el «no» hay un territorio enorme, y modelarlo explícitamente casi siempre produce sistemas más estables y más fáciles de explicar que fingir que ese territorio no existe.

Dónde solía tropezar yo

ERROR	POR QUÉ ES UN ERROR	ANTÍDOTO
Confundir grado de pertenencia con probabilidad	Que algo pertenezca a «caliente» con 0,7 no significa que haya un 70 % de probabilidad de que sea caliente. Son cosas distintas y los números no suman 1.	Pregúntate si la duda es «¿ocurrirá?» (probabilidad) o «¿cuánto se cumple?» (difusa).
Diseñar etiquetas que no se solapan	Si «templado» acaba justo donde empieza «caliente», recuperas los saltos bruscos que querías evitar.	Haz que las funciones de pertenencia se monten unas sobre otras en las fronteras.
Olvidar normalizar las escalas de entrada	Como en el k-means del Facsímil 1, una entrada en miles y otra entre 0 y 1 distorsionan las reglas.	Define cada universo de discurso con su rango real antes de fuzzificar.
Encadenar factores de certeza sin medir	Los CF pierden sentido cuando se encadenan muchas reglas dependientes; la creencia final puede no significar nada.	Para cadenas largas o evidencias correlacionadas, valora una red bayesiana del capítulo 2.
Elegir el método de defuzzificación al azar	El centroide y el método del máximo pueden dar valores muy distintos sobre la misma figura.	Elige el método según si quieres suavidad (centroide) o decisión tajante (máximo).

Cómo encaja todo

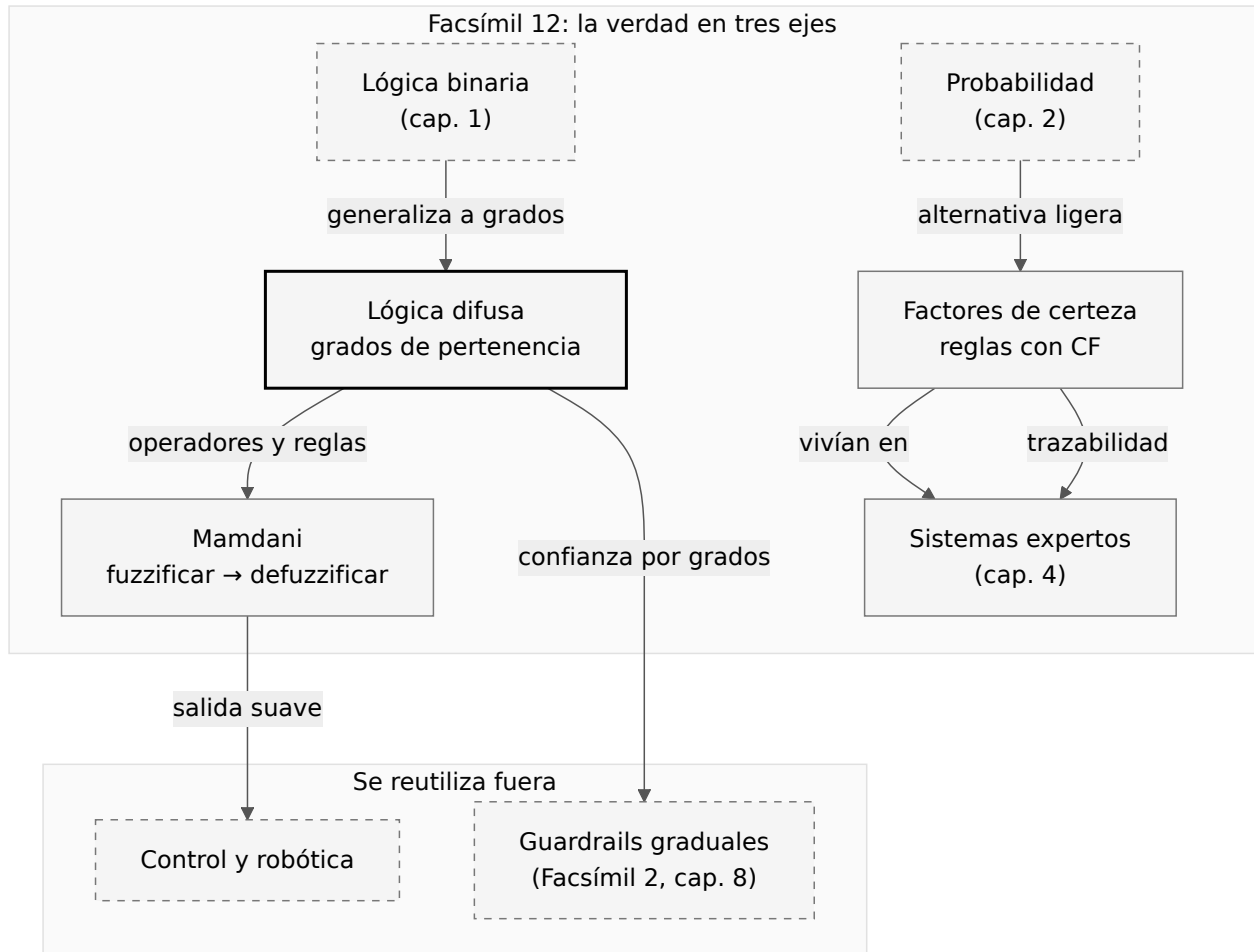
Este capítulo cierra un triángulo, no una escalera, y la diferencia importa. El capítulo 1 de este Facsímil 12 nos dio la lógica binaria, donde una afirmación es verdadera o falsa sin matices. El capítulo 2 nos dio la probabilidad, para los días en que no sabemos qué pasará. Y aquí hemos puesto el tercer vértice, la imprecisión, para cuando la propia frase admite grados. Ninguno destrona a los otros: un buen ingeniero sabe que son herramientas distintas para preguntas distintas, igual que un cocinero no tira el cuchillo por tener una batidora.

La conexión más fina, y la que más se confunde, es con ese capítulo 2. Allí, la probabilidad de que mañana llueva mide tu ignorancia sobre un hecho que será nítido: lloverá o no lloverá, y al asomarte a la ventana la duda se evapora. Aquí, en cambio, decir que a 22 °C la habitación está «templada con grado 0,8» no es ignorancia que vaya a resolverse: por mucho que mires el termómetro, 22 °C seguirá siendo templado a medias. Por eso los grados de pertenencia no suman 1 y las probabilidades sí. Cuando alguien te diga «hay un 70 % de que esto sea caliente», párate un segundo: casi siempre quiere decir «esto pertenece a caliente con grado 0,7», y son cosas distintas. Llevar la herramienta equivocada a ese problema es como medir un trozo de tela con un cronómetro.

Los **factores de certeza** miran en la otra dirección, hacia el capítulo 4 de este mismo facsímil. No nacieron como teoría elegante, sino dentro de los sistemas expertos: MYCIN, el consultor de infecciones de Stanford, necesitaba combinar reglas que un médico nunca habría firmado como verdades absolutas («si hay fiebre, *tiendo a pensar* en gripe»). Ese «tiendo a pensar» es un CF, y la cadena de reglas que MYCIN encadenaba para llegar a una conclusión es exactamente lo que el capítulo 4 celebra como explicabilidad: un sistema que no solo decide, sino que puede enseñarte el camino que recorrió. Cuando hoy una herramienta te muestra «recomendado con un 82 % de confianza, porque A y porque B», estás viendo el nieto lejano de aquellos factores de certeza.

Hacia fuera del facsímil, la lógica difusa enlaza con dos sitios que parecen lejanos pero comparten raíz. El primero son los **guardrails graduales** del capítulo 8 del Facsímil 2. Una política de seguridad que solo sepa decir «permitido» o «prohibido» se comporta como aquel termostato de un solo umbral: salta de golpe y se equivoca justo en la frontera. Una política que diga «permitido con grado de confianza» y deje pasar, bloquear o pedir revisión según ese grado es, sin más, una política difusa con otro nombre; el solapamiento entre etiquetas que dibujamos para frío y templado es el mismo que evita que un filtro de contenidos trate igual un caso clarísimo y uno dudoso. El segundo sitio, y donde la lógica difusa de verdad ganó la partida, es el **control en electrodomésticos y robótica**. La transición suave que calculamos para la propina es la misma que mantiene estable la temperatura de un aire acondicionado sin el vaivén de encender y apagar, la que ajusta el ciclo de una lavadora a lo sucia que está el agua, o la que frenaba el metro de Sendai con tanta delicadeza que los pasajeros no se agarraban a las barras. En todos esos casos no hubo una red neuronal ni un modelo gigantesco: hubo un puñado de reglas en lenguaje casi natural y un centroide, como el que hemos calculado a mano. Esa es, quizá, la mejor lección del capítulo: a veces la idea más útil no es la más sofisticada, sino la que se atreve a tomarse en serio el «más o menos».

Facsímil 12: la verdad en tres ejes



Vocabulario aprendido

TÉRMINO	DEFINICIÓN
Lógica difusa	Lógica de grados de verdad entre 0 y 1, no solo verdadero o falso.
Conjunto difuso	Conjunto donde cada elemento pertenece con un grado entre 0 y 1.
Función de pertenencia	Función que asigna a cada valor su grado de pertenencia a un conjunto difuso.
Grado de verdad	Valor entre 0 y 1 que cuantifica cuánto se cumple una afirmación difusa.
Variable lingüística	Variable cuyos valores son etiquetas como «bajo», «medio» o «alto».
Factor de certeza (CF)	Medida entre -1 y 1 del grado de creencia en una afirmación, usada en MYCIN.
Inferencia de Mamdani	Método de inferencia difusa: fuzzificar, evaluar reglas, agregar y defuzzificar.
Defuzzificación	Convertir un resultado difuso en un número concreto, por ejemplo con el centroide.
Centroide	Centro de gravedad de la figura agregada, el método de defuzzificación más usado.

Antes de pasar página

- ☐ ¿Puedo explicar la diferencia entre incertidumbre e imprecisión con un ejemplo de cada una? (Si no, vuelve a «Dos cosas distintas que llamamos incierto».)
- ☐ ¿Sé combinar dos factores de certeza positivos y entiendo por qué nunca superan 1? (Si no, vuelve a «Factores de certeza».)
- ☐ ¿Puedo dibujar una función de pertenencia triangular y leer el grado de un valor concreto? (Si no, vuelve a «Conjuntos difusos».)
- ☐ ¿Recuerdo qué operador difuso corresponde a Y, a O y a NO? (Si no, vuelve a «Operadores y reglas difusas».)
- ☐ ¿Sé recorrer los cuatro pasos de Mamdani: fuzzificar, evaluar, agregar y defuzzificar? (Si no, vuelve a «Inferencia de Mamdani».)
- ☐ ¿Entiendo qué calcula el centroide y por qué da un valor suave? (Si no, vuelve a «Paso 4: defuzzificación por centroide».)
- ☐ ¿He ejecutado el cuaderno y comprobado que el centroide ronda el 14,2 %?

En resumen

IDEA FUERZA	DETALLE
Incertidumbre e imprecisión no son lo mismo.	La probabilidad mide si un hecho nítido ocurre; la lógica difusa mide cuánto se cumple un predicado vago.
Los factores de certeza fueron el apaño práctico de los sistemas expertos.	Un CF entre -1 y 1 combina evidencias sin la maquinaria bayesiana completa, a cambio de un fundamento más débil.
Un conjunto difuso pertenece a medias.	La función de pertenencia da grados entre 0 y 1 , y las etiquetas solapadas convierten números en palabras.
Mamdani transforma reglas en números.	Fuzzificar, evaluar reglas con min y max, agregar y defuzzificar producen una salida concreta y suave.
La lógica difusa brilla en control.	Termostatos, lavadoras y trenes la usan porque evita los saltos bruscos de la lógica binaria.

Para saber más

Buchanan, B. G. y Shortliffe, E. H. (1984). *Rule-based expert systems: The MYCIN experiments of the Stanford Heuristic Programming Project*. Addison-Wesley.

Mamdani, E. H. y Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1), 1-13.

[https://doi.org/10.1016/S0020-7373\(75\)80002-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7373(75)80002-2)

Ross, T. J. (2010). *Fuzzy logic with engineering applications* (3.^a ed.). Wiley.

Russell, S. y Norvig, P. (2021). *Artificial intelligence: a modern approach* (4.^a ed.). Pearson.

Shortliffe, E. H. (1976). *Computer-based medical consultations: MYCIN*. Elsevier.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

[https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)

Notas

1. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

[https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X) ↵

2. Russell, S. y Norvig, P. (2021). *Artificial intelligence: a modern approach* (4.ª ed.). Pearson. El capítulo sobre razonamiento con incertidumbre separa explícitamente la vaguedad (lógica difusa) de la incertidumbre probabilística, y advierte de los errores que surgen al confundirlas. ↵
 3. Shortliffe, E. H. (1976). *Computer-based medical consultations: MYCIN*. Elsevier. La obra describe el sistema MYCIN y, en particular, el modelo de factores de certeza diseñado para razonar con reglas médicas que no eran lógicamente concluyentes. ↵
 4. Buchanan, B. G. y Shortliffe, E. H. (1984). *Rule-based expert systems: The MYCIN experiments of the Stanford Heuristic Programming Project*. Addison-Wesley. Recopila el modelo de factores de certeza, sus reglas de combinación y la discusión sobre sus límites teóricos frente a la probabilidad. ↵
 5. Ross, T. J. (2010). *Fuzzy logic with engineering applications* (3.ª ed.). Wiley. Desarrolla las operaciones sobre conjuntos difusos, los sistemas de reglas y los métodos de inferencia y defuzzificación que se usan en control. ↵
 6. Mamdani, E. H. y Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1), 1-13.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7373\(75\)80002-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7373(75)80002-2) ↵
-

Cuadernos para practicar

Escanea el código con el móvil para abrir el cuaderno en Google Colab y ejecutarlo sin instalar nada.



Lógica difusa: cuando «verdadero» y «falso» no bastan

<https://colab.research.google.com/github/686f6c61/iaparagentecuriosa-notebooks/blob/main/Facs%C3%ADmil%2012/03-logica-difusa.ipynb>